LYCEE CHEBBI	**DEVOIR DE SYNTHESE N°1**	**AMORRI MONGI**
GABES 07-08	**4°MATH 2**	**DUREE 3 HEURES**

EXERCICE N°1 : (5points)

1. Montrer par récurrence que pour tout réel x positif ou nul et pour tout entier n positif ou nul, on a $(1+x)^n \geq 1+nx$.

2. Soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \frac{n!}{n^n}$.

a. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\frac{u_n}{u_{n+1}} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.Déduire que (U_n) est décroissante et qu'elle est convergente

b. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $u_{n+1} \leq \frac{1}{2} u_n$ (On utilisera les questions 2-a et 1)

c. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \leq \frac{1}{2^{n-1}}$ et calculer la limite de (U_n)

EXERCICE N°2 :(5points)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(o, \vec{u}, \vec{v})$,on considère un triangle ABC inscrit dans un cercle (C) de centre o , et a, b, c sont les affixes respectives des points A , B et C et H le point d'affixe a+b+c

1. Montrer que $a\bar{a} = b\bar{b} = c\bar{c}$

2. On pose w= $\bar{b}c - b\bar{c}$ .Montrer que w est imaginaire pur

3. a. Vérifier que : $(b+c)(\bar{b}-\bar{c}) = \mathrm{w}$ et montrer que $\frac{b+c}{b-c} = \frac{\mathrm{w}}{|b-c|^2}$

   b. Déduire que la droite (AH) est perpendiculaire à la droite (CB)

4. Démontrer de même que les droites (BH) et (CA) sont perpendiculaires. Que représente le point H pour le triangle ABC

EXERCICE N°3 : (4points)

Soit la fonction f définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ par $f(x) = \begin{cases} \frac{tgx - x}{x} \; si \; x \neq 0 \\ 0 \; si \; x = 0 \end{cases}$

1-a. Montrer que la fonction g définie sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ par g(x) = tgx-x est continue sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ et dérivable sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$.

b. En déduire que pour tout $x\in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, il existe un réel $c \in]0,x[$ tel que $f(x) = tg^2c$

c- Prouver que $0\leq f(x)\leq tg^2x$

2- En déduire que f est dérivable en 0 à droite et déterminer $f'_d(0)$

EXERCICE N°4 :(6 points)

I- $f\left(x\right)=1+\sqrt{1-\frac{1}{x}}$ définie sur $\left[1,+\infty\right[$

1-Etudier la dérivabilité de f en 1 à droite. Interprétée géométriquement le résultat .Déterminer le domaine de dérivabilité de f

2- a -Etudier les variations de f sur $\left[1,+\infty\right[$

b- Prouver que f est une bijection de $\left[1,+\infty\right[$ sur un intervalle J que l'on précisera

c- Tracer $\left(C\right)$ et la courbe $\left(C^{-1}\right)$ de f^{-1} dans un même repère

5-Expliciter pour tout $x \in J$, $f^{-1}\left(x\right)$; Vérifier que pour tout $x \in [1,2[$, $f^{-1}\left(x\right)=\frac{1}{1-\left(x-1\right)^2}$

II- Soient les fonctions g et u définies sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$ par $u\left(x\right)=1+\cos x$ et $g\left(x\right)=f^{-1}\circ u\left(x\right)$

.

1- Vérifier que pour tout $x\in \left]0,\frac{\pi}{2}\right]$ $g\left(x\right)=1+\ \text{cotg}^2 x$

2-Montrer que g est dérivable sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$ puis montrer que h est une bijection de $\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$ sur un intervalle K que l'on déterminera

3-Déterminer le domaine E de dérivabilité de g^{-1} et montrer que $\left(g^{-1}\right)'(x) = -\frac{1}{2x\sqrt{x-1}}$

4- Soient les fonctions v et h définies sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ par $v(x)=1+tg^2x$ et $h(x) = g^{-1} \circ v(x)$.

Montrer que $h'(x) = -1$; Calculer $h\left(\frac{\pi}{4}\right)$, en déduire h(x)